

УДК 517.925

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ СИНХРОНИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

© М.Г. Юмагулов

Ключевые слова: вынужденные колебания; динамические системы; бифуркации; синхронизация.

Рассматривается задача о синхронизации вынужденных колебаний в нелинейных динамических системах. Предлагается новая схема исследования задач о синхронизации на субгармониках, основанная на операторном методе исследования задач о многопараметрических бифуркациях динамических систем. Предлагаемая схема позволяет в новых условиях изучить явление синхронизации, получить асимптотические представления возникающих колебаний.

Одно из фундаментальных свойств нелинейных динамических систем – это явление синхронизации, которое заключается в установлении определенных соотношений между параметрами системы и возникновении вследствие этого в системе незатухающих колебаний определенных периодов [1, 2]. Многие задачи приводят к необходимости исследования вопроса о синхронизации автоколебательной системы, имеющей собственную частоту ν_0 , внешним периодическим сигналом частоты ν . Здесь при определенных отношениях частот $\beta = \nu/\nu_0$ и амплитуды α внешнего сигнала возможно возникновение колебаний разных периодов. В частности, в системе могут возникнуть колебания, период которых является числом кратным периоду T внешнего сигнала. Такое явление называют синхронизацией на субгармониках, а возникающие периодические решения – субгармоническими колебаниями нелинейной системы. Задачи о синхронизации на субгармониках изучались многими авторами [2, 3]. Здесь особо важны исследования, направленные на поиск признаков такой синхронизации, приближенное построение возникающих решений, анализ их устойчивости.

В настоящей работе предлагается новая схема исследования задач о синхронизации на субгармониках, основанная на разработанном в [4, 5] операторном методе исследования задач о многопараметрических бифуркациях динамических систем. Предлагаемая схема позволяет в новых условиях изучить явление синхронизации, получить асимптотические представления возникающих колебаний.

Рассматривается зависящая от скалярного или векторного параметра μ динамическая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$x' = F(x, \mu) + g(t, \mu), \quad x \in R^N, \quad (1)$$

в котором $F(x, \mu)$ и $g(t, \mu)$ – это гладкие по совокупности переменных функции, при этом функция $g(t, \mu)$ является T -периодической по t : $g(t+T, \mu) \equiv g(t, \mu)$. Предполагается, что автономная система

$$x' = F(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad (2)$$

имеет точку равновесия $x^*(\mu)$, которую без ограничения общности можно считать нулевой, т. е. $F(0, \mu) \equiv 0$. Предполагается также, что при некотором $\mu = \mu_0$ внешний периодический сигнал $g(t, \mu)$ равен нулю: $g(t, \mu_0) \equiv 0$. Наконец, пусть точка равновесия $x=0$ системы (2) является негиперболической при $\mu = \mu_0$, а именно, пусть матрица Якоби $A(\mu) = F'_x(0, \mu)$

при $\mu = \mu_0$ имеет пару простых собственных значений $\pm \nu_0 i$, где $\nu_0 > 0$, и не имеет других чисто мнимых собственных значений.

Систему (2) можно представить в виде $x' = A(\mu)x + a(x, \mu)$, где нелинейность $a(x, \mu)$ является однородной по x и начинается с квадратичных слагаемых. Уравнение (1) можно рассматривать как динамическую систему, имеющую собственную частоту ν_0 и на которую воздействует внешний периодический сигнал $g(t, \mu)$ частоты $\nu = 2\pi/T$.

Пусть q – натуральное число. Будем говорить, что значение μ_0 параметра μ является *точкой синхронизации на субгармониках периода qT системы (1)*, если существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и определенная при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ непрерывная функция $\mu(\varepsilon)$ такая, что $\mu(0) = \mu_0$ и при этом для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ уравнение (1) при $\mu = \mu(\varepsilon)$ имеет ненулевое периодическое решение $x = x(t, \varepsilon)$ минимального периода qT такое, что функция $x(t, \varepsilon)$ непрерывно зависит от ε , при этом $\|x(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ равномерно по t .

Отметим, что синхронизация на субгармониках периода qT является типичным явлением в нелинейной системе (1), если отношение частот ν_0 и ν является рациональным, а именно, если выполнено равенство

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{p}{q} \quad (3)$$

при некоторых натуральных p и q .

Пусть условие (3) выполнено. Для исследования задачи о синхронизации на субгармониках периода qT предлагается следующая схема. На первом этапе от дифференциального уравнения (1) осуществляется переход к операторному уравнению

$$y = B(\mu)y + b(x, \mu) + u(\mu), \quad y \in R^N, \quad (4)$$

где

$$B(\mu) = e^{qTA(\mu)}, \quad b(y, \mu) = \int_0^{qT} e^{q(T-s)A(\mu)} a(x(s), \mu) ds,$$

$$u(\mu) = \int_0^{qT} e^{q(T-s)A(\mu)} g(s, \mu) ds;$$

здесь $x(t)$ – это решение задачи Коши для дифференциального уравнения (1) при начальном условии $x(0) = y$. Задача о qT -периодических решениях уравнения (1) равносильна задаче о решениях уравнения (4) в следующем смысле: если функция $x(t)$ является qT -периодическим решением уравнения (1), то вектор $y = x(0)$ будет решением уравнения (4) и, наоборот, если вектор y является решением уравнения (4) то решение $x(t)$ задачи Коши для дифференциального уравнения (1) при начальном условии $x(0) = y$ будет qT -периодическим решением уравнения (1).

На втором этапе исследование операторного уравнения можно проводить на основе разработанных в [4, 5] операторных методов исследования задач о многопараметрических бифуркациях динамических систем.

Так как матрица $A(\mu_0)$ имеет пару простых собственных значений $\pm \nu_0 i$ и не имеет других чисто мнимых собственных значений, то в силу условия (3) матрица $B(\mu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Тогда найдутся две пары линейно независимых векторов e, g и e^*, g^* таких, что векторы e и g являются собственными для матрицы $B(\mu_0)$, отвечающими собственному значению 1, а векторы e^* и g^* являются собственными для транспонированной матрицы $B^*(\mu_0)$, отвечающими собственному значению 1. При этом они могут быть выбраны исходя из соотношений:

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \quad (e, g^*) = (g, e^*) = 0.$$

В рассматриваемой задаче естественным будет предположение, что параметр μ является двумерным, т. е. $\mu = (\alpha, \beta)$, где α и β – скалярные параметры; положим также $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$y = B(\alpha, \beta)y + b(x, \alpha, \beta) + u(\alpha, \beta), \quad y \in R^N.$$

Определим матрицу

$$S = \begin{bmatrix} (u'_\alpha(\alpha_0, \beta_0), e^*) & (u'_\beta(\alpha_0, \beta_0), e^*) \\ (u'_\alpha(\alpha_0, \beta_0), g^*) & (u'_\beta(\alpha_0, \beta_0), g^*) \end{bmatrix}.$$

Здесь u'_α и u'_β – векторы, полученные дифференцированием вектора $u(\alpha, \beta)$ по α и β соответственно.

Т е о р е м а 1. Пусть $\det S \neq 0$. Тогда значение $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ параметра $\mu = (\alpha, \beta)$ является точкой синхронизации на субгармониках периода qT системы (1).

Рассмотрим теперь вопрос о построении функции $\mu(\varepsilon)$, участвующей в определении понятия точки синхронизации на субгармониках. Так как в данном случае имеем $\mu = (\alpha, \beta)$ и $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$, то речь идет о двух непрерывных скалярных функциях $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$, таких, что $\alpha(0) = \alpha_0$ и $\beta(0) = \beta_0$.

Т е о р е м а 2. Пусть

$$(b(e, \alpha_0, \beta_0), e^*) \neq 0, \quad (b(e, \alpha_0, \beta_0), g^*) \neq 0.$$

Тогда в условиях теоремы 1 уравнение (1) имеет субгармонические решения при $\mu = (\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))$, где функции $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ представимы в виде

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \alpha_3(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon^2 \beta_2 + \beta_3(\varepsilon);$$

здесь числа α_2 и β_2 являются ненулевыми, а функции $\alpha_3(\varepsilon)$ и $\beta_3(\varepsilon)$ – это непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям: $\alpha_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$, $\beta_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При доказательстве теорем 1 и 2 были получены конечные формулы для чисел α_2 и β_2 . Из теоремы 2, в частности, следует, что явление синхронизации на субгармониках периода qT системы (1) имеет, как правило, “направленный” характер: например, если $\alpha_2 > 0$ и $\beta_2 > 0$, то субгармонические колебания возникают при $\alpha > \alpha_0$ и $\beta > \beta_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.
3. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971.
4. Юмагулов М.Г. Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах. // Доклады АН. 2009. Т. 424. № 2. С. 177-180.
5. Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации о многопараметрических динамических системах // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. № 4. С. 3-26.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки РФ, соглашение 14.В37.21.0358 «Развитие новых направлений спектральной теории и теории функций, их приложения в задачах математической физики и нелинейной динамики».

Yumagulov M.G. METHODS OF RESEARCH PROBLEMS SYNCHRONIZATION OF PERIODIC OSCILLATIONS IN NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

In this paper we study the problem of synchronization of forced oscillations in nonlinear control systems. A new scheme of study of synchronization problems in the sub-harmonics, based on the operator

method for the study of problems of multi-parameter bifurcations is proposed. The scheme allows you to define the new conditions for signs of synchronization and asymptotic formula for the resulting solutions.

Key words: forced oscillations; dynamical system; bifurcation; synchronization.

УДК 517.92

ПРИЗНАКИ СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ БИФУРКАЦИИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

© М.Г. Юмагулов, Д.А. Якшибаева

Ключевые слова: бифуркация; динамические системы; системы с запаздыванием; операторные уравнения; функционализация параметра; асимптотические формулы.

В работе предлагается операторный метод для исследования эффекта возникновения субгармонических колебаний в системах с последствием, с периодической правой частью. Метод приводит к новым достаточным признакам бифуркации субгармонических колебаний, а также позволяет получить приближенные формулы для возникающих решений. В качестве приложения рассмотрена задача о точках бифуркации модели, описывающей циклические колебания деловой активности вокруг трендовой кривой роста.

Постановка задачи.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, зависящую от векторного параметра λ с T -периодической по t правой частью:

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau Q(\lambda, t, \tau)] x(t - \tau) + a(\lambda, t, x_t), x \in R^N, \lambda \in R^k, \quad (1)$$

где $0 < r \leq T$, $Q(\lambda, t, \tau)$ — квадратная $N \times N$ матрица, элементы которой при каждом λ являются функциями ограниченной вариации по $t \in [0, r]$ и при каждом $t \in [0, r]$ непрерывно дифференцируемы по λ ; $x_t = (x(t - \varsigma_1), \dots, x(t - \varsigma_s))$, $\varsigma_j \in [0, T)$, $j = 1, \dots, s$; нелинейность $a(t, \lambda, x_t)$ равномерно по λ и t удовлетворяет соотношению $\|a(t, \lambda, x_t)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \rightarrow 0$. Интегралы (1) понимаются в смысле Лебега-Стилтьеса, $\|\cdot\|$ — норма векторов в евклидовом пространстве R^N .

Уравнение (1) при всех значениях λ имеет нулевое решение. В статье исследуется задача о бифуркации периодических решений уравнения (1) в окрестности точки $x = 0$.

Наряду с (1) будем рассматривать линейную систему

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau Q(\lambda, t, \tau)] x(t - \tau). \quad (2)$$

Критическими для уравнения (1) будут те значения λ_0 параметра λ , при которых один или несколько мультипликаторов системы (2) по модулю равны 1. Изменение